Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Examen Global**
Fecha: 27/04/2022 **3ª Evaluación**
Profesor: Beatriz Ballesteros

Instrucciones:

1. **Cada ejercicio tiene una calificación global de 2 puntos. El alumno debe escoger 5 ejercicios de los 10 del examen,indicando siempre el número, la opción y apartado del ejercicio a resolver.**
2. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a las cuestiones en las hojas de respuestas de examen.
3. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
4. Cualquier comportamiento que pueda ser interpretado como un intento de pedir o transmitir información a un compañero conllevará la retirada del examen a los alumnos implicados y la no calificación del mismo.

Preguntas:

A.1 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Discútase el sistema siguiente en función del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + az = 0 \\ 2x - y + a^2 z = 1 \end{cases}$$

A.2 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Sea S la región del plano definida por:
$x - 2y < 0$, $x - y < 1$, $x + y < 5$, $x > 0$, $y > 0$

a) **(1 punto)** Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) **(1 punto)** Obténganse los válores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - y$ en la región S, indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

A.3 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$$

a) **(1 punto)** Calcúlese el valor del parámetro real a, sabiendo que la función alcanza un extremo relativo en $x = -1$. Compruébese que se trata de un máximo.

b) **(1 punto)** Para $a = 1$, calcúlese:

$$\int_{-1}^{0} (x - 1) \cdot f(x) dx$$

A.4 **(Calificación máxima: 2 puntos)** La probabilidad de que un vehículo de cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0,2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0,85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0,1.

a) **(1 punto)** Si se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

b) **(1 punto)** Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

A.5 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Se supone que el tiempo de una conversación de un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatroia con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95%.

a) **(1 punto)** Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) **(1 punto)** Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

B.1 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) **(1 punto)** Calcúlese la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

B.2 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

B.3 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si \quad x < -1 \\ e^{2x+2} & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) **(1 punto)** Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual f es una función continua en $x = -1$.

b) **(1 punto)** Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$.

B.4 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado servicio a internet, el 33% tienen contratada televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar:

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

B.5 **(Calificación máxima: 2 puntos)** Se supone que la estancia (en días) de un cierto hospotal se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) **(1 punto)** Determínese un intervalo de confianza del 95% para la estancia media de un paciente en dicho hospital.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud inferior o igual a 4 días?

A.1 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & a \\ 1 & 0 & a & | & 0 \\ 2 & -1 & a^2 & | & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & a^2 \end{vmatrix} = -2a + a + a^2 = a^2 - a = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $a = 0$, $a = 1$

* **Caso I:** si $a \neq 0$, $a \neq 1$.
$rgA = 3 = rgA^* =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, $\exists!$ solución

* **Caso II:** $a = 0$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow rgA^* = 3$

$rgA = 2 \neq rgA^* = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible, $\nexists$ solución

* **Caso III:** $a = 1$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

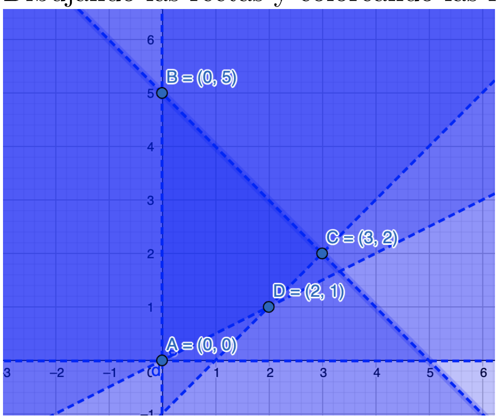
$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \Longrightarrow rgA^* = 2$

$rgA = 2 = rgA^* = 2 =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado, $\exists$ infinitas soluciones

A.2 El sistema de restricciones es: $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x - y < 1 \\ x + y < 5 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Dibujando las rectas y coloreando las regiones indicadas, obtenemos el siguiente dibujo:



La región factible es el cuadrilátero de vértices ABCD, y sus puntos interiores siendo:
$A(0,0)$
$B(0,5)$
$C(3,2)$
$D(2,1)$

La función objetivo es: $f(x,y) = x - y$
$A \longrightarrow f(0,0) = 0 - 0 = 0$
$B \longrightarrow f(0,5) = 0 - 5 = -5$
$C \longrightarrow f(3,2) = 3 - 2 = 1$
$D \longrightarrow f(2,1) = 2 - 1 = 1$
El máximo de la función es 1 y se alcanza en el segmento CD
El mínimo de la función es -5 y se alcanza en el punto $(0,5)$.

A.3 a) $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x-1}$

Si hay un mínimo en $x=-1$ entonces $f'(-1) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+a)}{(x-1)^2} = 0$$

$$f'(-1) = \frac{-2\cdot(-2)-(1+a)}{(-2)^2} = \frac{4-1-a}{4} = 0$$

$a = 3$

b)

$$\int_{-1}^{0}(x-1)\cdot f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x-1)\cdot\frac{x^2+1}{x-1}dx = \int_{-1}^{0}(x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} = -\left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{4}{3}u^2$$

A.4 $A =$ sufre un accidente
$G =$ necesita grúa

a) $P(G) = P(A\cap G) + P(\overline{A}\cap G) = 0,2\cdot 0,85 + 0,8\cdot 0,1 = 0,25$

b) $P(\overline{A}/G) = \dfrac{P(\overline{A}\cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,8\cdot 0,1}{0,25} = 0,32$

A.5 $X =$ tiempo de conversación de un teléfono móvil
$X \sim N(\mu; 1,3)$
$E = 0,5$
$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

a) $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$0,5 = 1,96\cdot\dfrac{1,3}{\sqrt{n}}$

$$\sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 1,3}{0,5} = 5,096$$

$n^2 = 25,96 \Rightarrow$ Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra será 26

b) $\overline{X} \sim N\left(4,36; \dfrac{1,3}{\sqrt{16}}\right)$

$\overline{X} \sim N(4,36; 0,325)$

$$P(4 \leq \overline{X} \leq 5) = P\left(\frac{4-4,36}{0,325} \leq Z \leq \frac{5-4,36}{0,325}\right) = P(-1,11 \leq Z \leq 1,97) =$$

$$P(Z \leq 1,97) - P(Z \leq -1,11) = 0,9756 - (1 - P(Z \leq 1,11)) =$$

$$0,9756 - (1 - 0,8665) = 0,9756 - 0,1335 = 0,8421$$

B.1 a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $A \cdot B = B \cdot A = I$, podemos concluir que B es la inversa de A.

b) $A \cdot X = B$

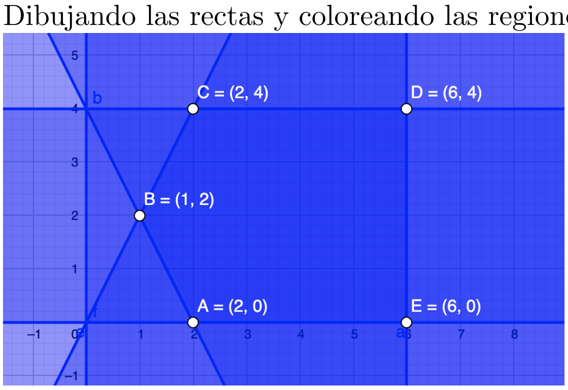
$A-1 \cdot A \cdot X = A-1 \cdot B$
$X = A-1 \cdot B = B \cdot B$

$$X = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$$

B.2 a) $x =$ número de toneladas de pienso A
y= número de toneladas de pienso B

El sistema de restricciones es: $\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 4 \\ y \leq 2x \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Dibujando las rectas y coloreando las regiones indicadas, obtenemos el siguiente dibujo:



La región factible es el cuadrilátero de vértices ABCD, y sus puntos interiores siendo:
$A(2,0)$
$B(1,2)$
$C(2,4)$
$D(6,4)$
$E=(6,0)$

La función objetivo es: $f(x,y)=1000x+2000y$
$A \longrightarrow f(2,0)=2000$ euros
$B \longrightarrow f(1,2)=5000$ euros
$C \longrightarrow f(2,4)=10000$ euros
$D \longrightarrow f(6,4)=14000$ euros
$E \longrightarrow f(6,0)=6000$ euros
El mínimo de la función es 2000 euros y se alcanza con 2 tonelas del pienso tipo A.

B.3 a) $f(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x<-1 \\ e^{2x+2} & si \quad x\geq -1 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en $x=-1$:

1) Calculamos el $\lim_{x\to\ -1} f(x)$. Por ser una función a trozos, estudiamos los límites laterales:
$\lim_{x\to\ -1^-} f(x)=\lim_{x\to\ -1}(2x+a)=-2+a$
$\lim_{x\to\ -1^+} f(x)=\lim_{x\to\ -1} e^{2x+2}=e^0=1$

Como queremos que los límites laterales sean iguales para que exista $\lim_{x\to\ -1} f(x)$:

$-2+a=1$ y por tanto $a=3$.

2) Calculamos $f(-1)$:

$f(-1)=e^0=1$

3) $f(-1)=1=\lim_{x\to\ -1} f(x)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x=-1$ si $a=3$.

b)

$$\int_0^1 e^{2x+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2x+2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x+2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^4-e^2)$$

B.4 $A=$ tiene servicio de internet
$B=$ tiene servicio de televisión
$P(A)=0,4$
$P(B)=0,33$
$P(A\cap B)=0,2$

a) $P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(A\cap B)=0,33-0,2=0,13$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0, +0, 33 - 0, 2] = 1 - 0, 53 = 0, 47$

B.5 $X =$ número de días de estancia en un hospital
$X \sim N(\mu; 9)$
$\overline{X} = 8$
$n = 20$

a) $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1, 96$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1, 96 \cdot \frac{9}{\sqrt{20}} = 3, 94$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (8 - 3, 94, 8 + 3, 94) = (4, 06; 11, 94)$$

b) $2E =$longitud del intervalo

$$E = \frac{4}{2} = 2$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2 = 1, 96 \cdot \frac{1, 3}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{1, 96 \cdot 9}{2} = 8, 82$$

$n^2 = 77, 79 \Rightarrow$ Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra será 78