Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Examen Parcial 1**
Fecha: 1/4/2022 **3ª Evaluación**
Profesor: Beatriz Ballesteros

Instrucciones:

1. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a las cuestiones en las hojas de respuestas de examen indicando siempre el número y apartado del ejercicio a resolver.
2. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
3. Cualquier comportamiento que pueda ser interpretado como un intento de pedir o transmitir información a un compañero conllevará la retirada del examen a los alumnos implicados y la no calificación del mismo.

Preguntas:

1. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:
$$\begin{cases} -x+3y+3z=0 \\ -x+3y+z=1 \\ -x+ay+2z=0 \end{cases}$$
   a) **(1,5 puntos)** Discuta el sistema según los distintos valores del parámetro real a.
   b) **(1,5 puntos)** Resuelva el sistema para $a=1$.

2. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Dada la función real de variable real:
$$f(x)=\frac{\lambda\cdot x}{4+x^2}$$
   a) **(1,5 puntos)** Calcúlese el valor del parámetro λ para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=-1$ sea paralela a la recta $y=2x-3$.
   b) **(1,5 puntos)** Calcúlese para el valor $\lambda=1$:
$$\int_0^2 f(x)dx$$

3. **(Calificación máxima: 4 puntos)** Dada la función real de variable real definida por:
$$f(x)=x^3-6x^2+9x$$
   a) **(1 punto)** Determinar los puntos de corte de $f(x)$ con los ejes de coordenadas.
   b) **(2 puntos)** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, así como sus máximos o mínimos relativos si los tuviera.
   c) **(1 punto)** El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

1. $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & | & 1 \\ -1 & a & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

   a) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = -6 - 3a - 3 + 9 + 6 + a = -2a + 6 = 0$

   Resolviendo la ecuación: $a = 3$

   * **Caso I:** si $a \neq 3$.
     $rgA = 3 = rgA^* = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, $\exists!$ solución

   * **Caso II:** $a = 3$.
     $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$
     $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 9 = -6 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2$
     $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 \neq 0 \Longrightarrow rgA^* = 3$
     $rgA = 2 \neq rgA^* = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible, $\nexists$ solución

   b) Si $a = 3$: $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$
   Por el apartado anterior sabemos que para $a = 1$ el sistema es Compatible Determinado, por lo que para resolverlo podemos aplicar la regla de Cramer:
   $|A| = -2a + 6 = -2 + 6 = 4$
   $|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$
   $|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$
   $|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2$
   $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$; $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{1}{4}$; $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

2. a) Si la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$, quiere decir que la recta tangente tiene pendiente $m = 2$, es decir, que $f'(-1) = 2$.

   Calculamos $f'(x)$:

   $$f'(x) = \frac{\lambda(4+x^2) - \lambda x \cdot 2x}{(4+x^2)^2} = \frac{4\lambda + \lambda x^2 - 2\lambda x^2}{(4+x^2)^2} = \frac{4\lambda - \lambda x^2}{(4+x^2)^2}$$

   Calculamos $f'(-1)$:

   $$f'(-1) = \frac{4\lambda - \lambda(-1)^2}{(4+(-1)^2)^2} = \frac{4\lambda - \lambda}{25} = \frac{3\lambda}{25}$$

   Como sabemos que $f'(-1) = 2$:

   $$\frac{3\lambda}{25} = 2$$

   Resolviendo la ecuación, obtenemos: $3\lambda = 50 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{50}{3}$

   b)

   $$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{4+x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln|4+x^2|\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln|4+2^2| - \ln|2^2|) =$$

   $$= \frac{1}{2} \cdot (\ln 8 - \ln 2) = \frac{1}{2}(\ln 2^3 - \ln 2^2) = \frac{1}{2} \cdot (3\ln 2 - 2\ln 2) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2$$

3. $f(x) = x^3 - 6x^3 + 9x$

   a) Puntos de corte con el eje $OX \Rightarrow y = 0$:

   $x^3 - 6x^3 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0$

   Resolviendo la ecuación, obtenemos las soluciones: $x = 0$ y $x = 3$. Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son el $(0, 0)$ y el $(3, 0)$.

   Puntos de corte con el eje $OY \Rightarrow x = 0$:

   $f(0) = 0$

   Por tanto, el punto de corte con el eje OY es el $(0, 0)$.

   b) $Dom f = \mathbb{R}$

   Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de f, para ello calculamos primero su derivada y la igualamos a 0:

   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

Resolvemos la ecuación: $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f'(0) = 9 > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$
$f'(2) = -3 < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(1, 3)$
$f'(4) = 9 > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$

Vamos a estudiar ahora sus máximos y mínimos locales:

- Como $f(x)$ es continua en $(-\infty, 3)$, es esctrictamente crece en $(-\infty, 1)$ y estrictamente decreciente en $(1, 3)$, existe un máximo local en: $(1, f(1)) = (1, 4)$
  $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$
- Como $f(x)$ es continua en $(1, +\infty)$, y es estrictamente decreciente en $(1, 3)$ y estrictamente creciente en $(3, +\infty)$, existe un mínimo local en: $(3, f(3)) = (3, 0)$
  $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$

c)

$$I = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4}$$

$$A = |I| = \left|\frac{27}{4}\right| = \frac{27}{4}\ u^2.$$