Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Examen Global**
Fecha: 4/03/2022 **2ª Evaluación**
Profesor: Beatriz Ballesteros

Instrucciones:

1. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a las cuestiones en las hojas de respuestas de examen indicando siempre el número y apartado del ejercicio a resolver.
2. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
3. Cualquier comportamiento que pueda ser interpretado como un intento de pedir o transmitir información a un compañero conllevará la retirada del examen a los alumnos implicados y la no calificación del mismo.

Preguntas:

1. **(Calificación máxima: 2,5 puntos)** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:
$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=2 \\ x+y+2z=5 \\ -x+(m+2)z=3 \end{array}\right.$$
   a) **(1,5 puntos)** Discutir el sistema según los distintos valores del parámetro real m.
   b) **(1 punto)** Resuelva el sistema para $m=3$.

2. **(Calificación máxima: 2,5 puntos)** Una compañía naviera dispone de 2 barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben de hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.
   a) **(0,75 puntos)** Escribir las restricciones del problema y expresar la función objetivo.
   b) **(1 punto)** Representar gráficamente el recinto definido por el problema.
   c) **(0,75 puntos)** Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el beneficio máximo. Calcular dicho beneficio máximo.

3. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{4-2x}{x^2}$.
   a) **(1,5 puntos)** Determínense los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.
   b) **(1,5 puntos)** Hállense los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de f.

4. **(Calificación máxima: 2 puntos)** Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$.
   a) **(1 punto)** Hállense las asíntotas de f.
   b) **(1 punto)** Determínese la ecuación de la recta tangente de f en el punto de abscisa $x=1$.

1. $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & | & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & m+2 \end{vmatrix} = 2m+4-2-1-m-2 = m-1 = 0$

Resolviendo la ecuación: $m = 1$

* **Caso I:** si $m \neq 1$.
  $rgA = 3 = rgA^* =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, $\exists!$ solución

* **Caso II:** $m = 1$.
  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 5 \\ -1 & 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$
  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2$
  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6-5+2-3 = 0 \Longrightarrow rgA^* = 2$
  $rgA = 2 = rgA^* = 2 =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado, $\exists$ infinitas soluciones

b) Si $m = 3$: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 5 \\ -1 & 0 & 5 & | & 3 \end{pmatrix}$

Por el apartado anterior sabemos que para $m = 3$ el sistema es Compatible Determinado, por lo que para resolverlo podemos aplicar la regla de Cramer:

$|A| = m-1 = 3-1 = 2$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10+6+3-25 = -6$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 50-3-4-5-12-10 = 16$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6-5+2-3 = 0$

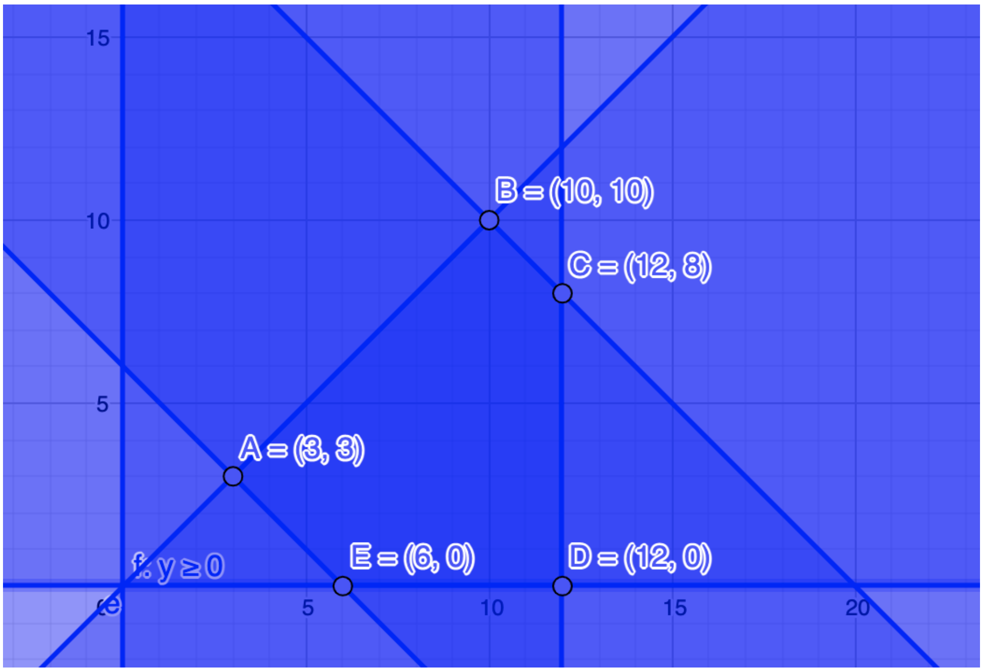
$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-6}{2} = -3$; $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{16}{2} = 8$; $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{0}{2} = 0$

2. $x =$ nº de viajes del barco A
   $y =$ nº de viajes del barco B

a) El sistema de restricciones es: $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 12 \\ x + y \geq 6 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo es: $f(x, y) = 18000x + 12000y$

b) Dibujando las rectas y coloreando las regiones indicadas, obtenemos el siguiente dibujo:



La región factible es el pentágono de vértices ABCDE, y sus puntos interiores siendo:
$A(3, 3)$
$B(10, 10)$
$C(12, 8)$
$D(12, 0)$
$E(6, 0)$

c) La función objetivo es: $f(x, y) = 18000x + 12000y$
$A \longrightarrow f(3, 3) = 18000 \cdot 3 + 12000 \cdot 3 = 90000$ euros
$B \longrightarrow f(10, 10) = 18000 \cdot 10 + 12000 \cdot 10 = 300000$ euros
$C \longrightarrow f(12, 8) = 18000 \cdot 12 + 12000 \cdot 8 = 312000$ euros
$D \longrightarrow f(12, 0) = 18000 \cdot 12 + 12000 \cdot 0 = 216000$ euros
$E \longrightarrow f(6, 0) = 18000 \cdot 6 + 12000 \cdot 0 = 108000$ euros
El beneficio máximo es de 312000 euros y se alcanza con 12 viajes del barco A y 8 viajes del barco B.

3. $f(x) = \dfrac{4-2x}{x^2}$

a) $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de f, para ello calculamos primero su derivada y la igualamos a 0:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - (4-2x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x^2 - 8x + 4x^2}{x^4} = \frac{2x^2 - 8x}{x^4} = 0$$

Resolvemos la ecuación: $2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x\cdot(2x-8) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$(-\infty, 0)$	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f'(-1) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$
$f'(1) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(0,4)$
$f'(5) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(4,+\infty)$

Vamos a estudiar ahora sus máximos y mínimos locales:

- Como $f(x)$ no está definida en $x = 0$ aunque en $(-\infty, 0)$ crece y en $(0,4)$ decrece, no hay máximo en $x = 0$, ya que f no es continua en el intervalo $(-\infty, 4)$.
- Como $f(x)$ es continua en $(0,+\infty)$, decrece en $(0,4)$ y crece en $(4,+\infty)$, existe un mínimo local en: $(4, f(4)) = \left(4, -\dfrac{1}{4}\right)$
  $f(4) = \dfrac{4-8}{4^2} = \dfrac{-4}{16} = -\dfrac{1}{4}$

b) Calculamos la segunda derivada de f y la igualamos a 0:

$$f''(x) = \frac{(4x-8)\cdot x^4 - (2x^2-8x)\cdot 4x^3}{x^8} = \frac{4x^2 - 8x - 8x^2 + 32x}{x^5} = \frac{-4x^2 + 24x}{x^5} = \frac{-4x+24}{x^4} = 0$$

Resolvemos la ecuación: $-4x + 24 = 0 \Rightarrow x = 6$

Intervalos de concavidad y convexidad:

$(-\infty, 0)$	$(0,6)$	$(6,+\infty)$
$\cup$	$\cup$	$\cap$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en $(-\infty, 0)$
$f''(1) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en $(0,6)$
$f''(7) < 0 \Rightarrow f$ es convexa en $(6,+\infty)$

El único candidato a punto de inflexión es $x = 6$. Como f es continua en $(0,+\infty)$ y f es cóncava en $(0,6)$ y es convexa en $(6,+\infty)$, podemos concluir que en el punto $(6, f(6)) = \left(6, -\dfrac{2}{9}\right)$ hay un punto de inflexión.

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

a) Estudiamos el dominio de $f(x)$. Como es una función racional, su dominio serán todos los valores reales de x excepto aquellos que anulen al denominador:

$Dom f(x) = \mathbb{R} - \{3, -3\}$

1) Vamos a analizar si $f(x)$ tiene asíntotas verticales:

$\lim_{x\to\ 3^-} \dfrac{x^3}{x^2-9} = -\infty$
$\lim_{x\to\ 3^+} \dfrac{x^3}{x^2-9} = +\infty$

Por tanto, hay una asíntota vertical en $x = 3$

$\lim_{x\to\ -3^-} \dfrac{x^3}{x^2-9} = -\infty$
$\lim_{x\to\ -3^+} \dfrac{x^3}{x^2-9} = +\infty$

Por tanto, hay una asíntota vertical en $x = -3$

2) Vamos a analizar si $f(x)$ tiene asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\ +\infty} \dfrac{x^3}{x^2-9} = +\infty$
$\lim_{x\to\ -\infty} \dfrac{x^3}{x^2-9} = -\infty$

Por tanto, no hay asíntotas horizontales.

3) Vamos a analizar si $f(x)$ tiene asíntotas oblicuas:

$y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\ \pm\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim_{x\to\ \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^3-9x} = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$

$n = \lim_{x\to\ \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-9} - x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\ \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-9} - \dfrac{x^3-9x}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to\ \pm\infty} \dfrac{9x}{x^2-9} = \dfrac{\infty}{\infty} = 0$

Hay una asíntota oblicua en $y = x$.

b) La fórmula de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

Vamos a calcular cada uno de los datos que desconocemos:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 9) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{3x^4 - 27x^2 - 2x^4}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1 - 27}{64} = -\frac{13}{32}$$

$$f(1) = \frac{1}{1 - 9} = -\frac{1}{8}$$

Por tanto, la recta tangente buscada es:

$$y + \frac{1}{8} = -\frac{13}{32} \cdot (x - 1)$$

$$y = -\frac{13}{32}x + \frac{13}{32} - \frac{1}{8}$$

$$y = -\frac{13}{32}x + \frac{9}{32}$$