Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Examen Parcial 1**
Fecha: 9/2/2022 **2ª Evaluación**
Profesor: Beatriz Ballesteros

Instrucciones:

1. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a las cuestiones en las hojas de respuestas de examen indicando siempre el número y apartado del ejercicio a resolver.
2. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
3. Cualquier comportamiento que pueda ser interpretado como un intento de pedir o transmitir información a un compañero conllevará la retirada del examen a los alumnos implicados y la no calificación del mismo.

Preguntas:

1. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) **(1,5 puntos)** Calcúlese $A \cdot B$ y determínense los valores de x para los cuáles $A \cdot B$ es invertible.
   b) **(1,5 puntos)** Calcúlese la inversa de $A \cdot B$ cuando $x = 1$.

2. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Dada la función real de variable real:
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{3}{bx} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

   a) **(2 puntos)** Calcúlese todos los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todos sus puntos.
   b) **(1 punto)** Para $a = 6$ y $b = \dfrac{3}{4}$, determínense los puntos de corte de la gráfica f con los ejes de coordenadas.

3. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Se considera la curva de ecuación:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

   a) **(1,5 puntos)** Hállense sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si es que existen.
   b) **(1,5 puntos)** Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 2$.

4. **(Calificación máxima: 1 punto)** Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^2 - x - 6$. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Existirá $(A \cdot B)^{-1}$ si $|A \cdot B| \neq 0$.

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -x + 2 = 0$

Resolviendo la ecuación: $x = 2$

Por tanto, $\exists (A \cdot B)^{-1}$ si $x \neq 2$.

b) Si $x = 1$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|A \cdot B| = -1 + 2 = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists (A \cdot B)^{-1}$

Calculamos la matriz adjunta de $A \cdot B$: $Adj(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos su traspuesta: $(Adj(A \cdot B))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de $A \cdot B$:

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{|A \cdot B|} \cdot (Adj(A \cdot B))^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & si \quad x \leq 1 \quad * \\ \dfrac{3}{bx} & si \quad x > 1 \quad ** \end{cases}$

* continua en $(-\infty, 1)$ por ser función polinómica

** conitnua en $(1, \infty)$ por ser función racional cuyo denominador no se anula en $(1, \infty)$

Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

1) Calculamos el $\lim_{x \to 1} f(x)$. Por ser una función a trozos, estudiamos los límites laterales:
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2 - x + a) = -2 + a$
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{3}{bx} = \dfrac{3}{b}$
Como queremos que los límites laterales sean iguales para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$:

$$-2 + a = \frac{3}{b}$$

2) Calculamos $f(1)$:
$f(1) = -1^2 - 1 + a = -2 + a$

3) $f(1) = -2 + a = \lim_{x \to 1} f(x)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x = 1$ si $-2 + a = \dfrac{3}{b}$.

Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si \quad x < 1 \\ -\dfrac{3b}{(bx)^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Simplificando: $f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si \quad x < 1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$, para ello, calculamos sus derivadas laterales:

$f'(1^-) = -2 - 1 = -3$

$f'(1^+) = -\dfrac{3}{b}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$-3 = -\dfrac{3}{b} \Longrightarrow b = 1$

Sustiyendo en la ecuación obtenida para la continuidad:

$-2 + a = \dfrac{3}{b} \Longrightarrow -2 + a = \dfrac{3}{1} \Longrightarrow a = 5$

Por tanto, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ si $a = 5$ y $b = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 6 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{3}{\frac{3}{4}x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Operando:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 6 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte con los ejes de la primera rama de la función:

1) Corte con el eje OX, $y = 0$:

$0 = -x^2 - x + 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{matrix} \longrightarrow -3 \\ \longrightarrow +2 \end{matrix}$$

De aquí obtendríamos los puntos de corte $(-3, 0)$, que si pertenece a la primera rama de la función; y $(2, 0)$, pero este último no es un punto de corte de la función dada ya que no pertenece a la primera rama de la función (ya que solo llega hasta $x = 1$).

2) Corte con el eje OY, $x = 0$:

$f(0) = -0^2 - 0 + 6 = 6$

De aquí obtenemos el punto de corte $(0, 6)$.

Calculamos los puntos de corte con los ejes de la segunda rama de la función:

1) Corte con el eje OX, $y = 0$:

$\frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow 4 = 0 \Longrightarrow \nexists$ solución

No hay puntos de corte de la segunda rama con el eje OX.

2) Corte con el eje OY, $x = 0$:

Esta rama de la función empieza en $x = 1$, por lo que no hay puntos de corte con el eje OY.

En conclusión, los puntos de corte de la función con los ejes son: $(-3, 0)$ y $(0, 6)$.

3. a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Estudiamos el dominio de $f(x)$. Como es una función racional, su dominio serán todos los valores reales de x excepto aquellos que anulen al denominador:
$Dom f(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

1) Vamos a analizar si $f(x)$ tiene asíntotas verticales:

$\lim_{x \to \ 1^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$
$\lim_{x \to \ 1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

Por tanto, hay una asíntota vertical en $x = 1$

$\lim_{x \to \ -1^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$
$\lim_{x \to \ -1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

Por tanto, hay una asíntota vertical en $x = -1$

2) Vamos a analizar si $f(x)$ tiene asíntotas horizontales:

$\lim_{x \to \ +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$
$\lim_{x \to \ -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$

Por tanto, no hay asíntotas horizontales.

3) Vamos a analizar si $f(x)$ tiene asíntotas oblicuas:

$y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\ \pm\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\ \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^3-x} = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$

$n = \lim_{x\to\ \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\ \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - \dfrac{x^3-x}{x^2-1} \right) = \lim_{x\to\ \pm\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{\infty}{\infty} = 0$

Hay una asíntota oblicua en $y = x$.

b) La fórmula de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 2$ es:

$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

Vamos a calcular cada uno de los datos que desconocemos:

$f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

$f'(2) = \dfrac{16-12}{9} = \dfrac{4}{9}$

$f(2) = \dfrac{8}{4-1} = \dfrac{8}{3}$

Por tanto, la recta tangente buscada es:

$y - \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{9} \cdot (x - 2)$

$y = \dfrac{4}{9}x - \dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{3}$

$y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{16}{9}$

4. $\lim_{x\to\ 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to\ 3} \dfrac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+2)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to\ 3} \dfrac{(x+3)}{(x+2)} = \dfrac{3+3}{3+2} = \dfrac{6}{5}$