Derivadas

1 Introducción

La noción de derivada surgió, por un lado, al querer determinar la inclinación de la tangente a una curva en un punto de ella, y por otro lado, para dar sentido matemático al concepto de la velocidad instantánea.

Los primeros matemáticos en dar el gran salto al cálculo infinitesimal fueron Newton y Leibniz, a finales del siglo XVIII. Ellos inventaron los conceptos generales de derivada e integral, reconocieron que la derivación y la integración eran operaciones la una inversa de la otra, crearon una notación y algoritmos para hacer del cálculo infinitesimal un instrumento computacional poderoso, y extendieron la aplicación de los métodos del cálculo a funciones algebraicas y trascendentes. También hay que destacar a otros matemáticos como Taylor, Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrass, y los hermanos Bernouilli, quienes realizaron grandes contribuciones en este campo.

En este tema, introduciremos el concepto de derivada en un punto junto con su interpretación geométrica. Analizaremos el concepto de derivabilidad de una función en un punto, aprenderemos las reglas de derivación y estudiaremos algunas derivadas elementales. Por último, veremos algunas aplicaciones de las derivadas como el cálculo de la recta tangente, su uso para el estudio local y global de una función, así como algunos teoremas importantes.

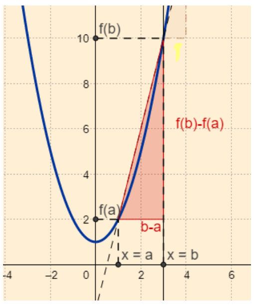
2 Derivada de una función en un punto

Dada una función $f(x)$, definimos la tasa de variación de f en el intervalo $[a, b]$ como el número que representa el incremento o disminución que presenta la función al aumentar la variable independiente desde $x = a$ hasta $x = b$, es decir:

$$TV[a, b] = f(b) - f(a)$$

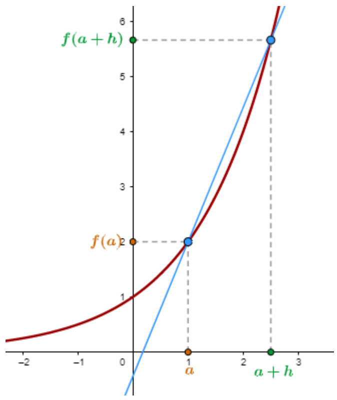
Partiendo de este concepto, podemos definir la tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ como la variación media que se produce en el intervalo:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Si en lugar de usar el intervalo $[a, b]$ utilizamos el intervalo $[a, a+h]$, con $h > 0$, la fórmula anterior quedaría así:

$$TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Es interesante observar qué ocurre cuando el intervalo donde calculamos la tasa de variación media es muy pequeño. Por ello, vamos a hacer el valor de h muy pequeño, casi tan pequeño como 0, es decir, vamos a hacer que h tienda a 0. Si hacemos h tender a 0 en la TVM, obtenemos el concepto de tasa de variación instantánea en el punto $x = a$:

$$TVI[a] = \lim_{h \to 0} TVM[a, a+h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto da lugar al concepto de derivada en un punto, es decir, la variación instantánea en un punto. Así, la derivada de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, se define como el límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si dicho límite existe, diremos que la función es derivable en $x = a$ y el valor de la derivada será $f'(a)$.

Se definen las derivadas laterales de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ como:

- Derivada por la izquierda de $f(x)$ en $x = a$: $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- Derivada por la derecha de $f(x)$ en $x = a$: $f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Si las dos derivadas laterales de $f(x)$ en $x = a$ son iguales, diremos que $f(x)$ es derivable en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es derivable en un punto $x = a$, entonces también será continua en dicho punto. Por tanto, si $f(x)$ no es continua en $x = a$, tampoco podrá ser derivable en dicho punto. Sin embargo, el que una función $f(x)$ sea continua en $x = a$ no quiere decir que vaya a ser derivable en dicho punto.

3 Reglas de derivación

Aunque aplicando la definición del epígrafe anterior podríamos calcular cualquier derivada de cualquier función, el proceso puede resultar bastante tedioso y complicado. Por ello, conocemos una serie de reglas que junto con las derivadas de las funciones elementales nos van a permitir derivar una gran cantidad de funciones.

Veamos cuáles son las reglas de derivación:

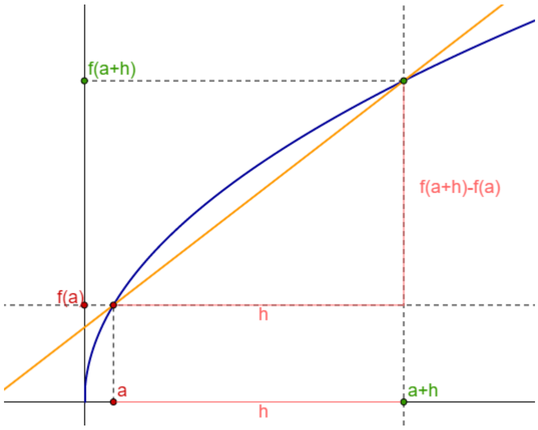
Regla	Función	Derivada
Producto por una constante	$f(x) = k \cdot g(x)$	$f'(x) = k \cdot g'(x)$
Suma/Resta	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
Producto	$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
Cociente	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
Regla de la cadena	$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Veamos cuáles son las derivadas de las funciones elementales:

Función simple		Función compuesta	
Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = a$	$f'(x)' = 0$	-	-
$f(x) = x$	$f(x)' = 1$	-	-
$f(x) = x^n$	$f(x)' = nx^{n-1}$	$f(x) = [g(x)]^n$	$f(x)' = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f(x)' = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f(x)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = a^x$	$f(x)' = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = a^{g(x)}$	$f(x)' = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)$
$f(x) = \ln x$	$f(x)' = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln g(x)$	$f(x)' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \log_a x$	$f(x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \log_a g(x)$	$f(x)' = \dfrac{g'(x)}{g(x) \ln a}$
$f(x) = sen(x)$	$f(x)' = cos(x)$	$f(x) = sen(g(x))$	$f(x)' = cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = cos(x)$	$f(x)' = -sen(x)$	$f(x) = cos(g(x))$	$f(x)' = -sen(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = tg(x)$	$f(x)' = 1 + tg^2(x)$	$f(x) = tg(g(x))$	$f(x)' = [1 + tg^2(g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = ctg(x)$	$f(x)' = -[1 + ctg^2(x)]$	$f(x) = ctg(g(x))$	$f(x)' = -[1 + ctg^2(g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = arcsen(x)$	$f(x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = arcsen(g(x))$	$f(x)' = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$
$f(x) = arcos(x)$	$f(x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = arcos(g(x))$	$f(x)' = -\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$
$f(x) = arctg(x)$	$f(x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = arctg(g(x))$	$f(x)' = \dfrac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$

4 Interpretación geométrica de la derivada

Dada una función $f(x)$, queremos encontrar la recta secante a esta que pasa por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(a+h, f(a+h))$.

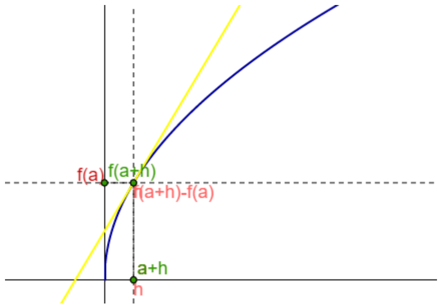


La pendiente de la recta secante a $f(x)$ que pasa por A y B es:

$$m = tg\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si vamos haciendo h cada vez más pequeño, llegará un momento en que h sea tan pequeño que A y B casi son el mismo punto, es decir, en lugar de una recta secante a $f(x)$ estaríamos trazando una recta tangente a $f(x)$ en el punto A y de pendiente:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$



5 Aplicaciones de las derivadas

5.1 Al cálculo de la recta tangente

Como ya hemos visto en el apartado anterior, dada una función $f(x)$ y un punto $A(a, f(a))$ de su dominio, la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de A es $f'(a)$, por tanto, la ecuación de dicha recta tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Recordatorio: la pendiente de una recta se dice que es horizontal cuando $m = 0$.

5.2 Al estudio local y global de funciones

En este apartado vamos a utilizar derivadas para analizar distintas características de las funciones (crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, su curvatura, sus puntos de inflexión...). Incluiremos en este epígrafe también el estudio de otras características de las funciones como sus puntos de corte con los ejes o sus asíntotas, que nos serán de utilidad a la hora de analizar funciones para su representación, pese a que no necesitemos el uso de derivadas para su obtención.

5.2.1 Puntos de corte con los ejes

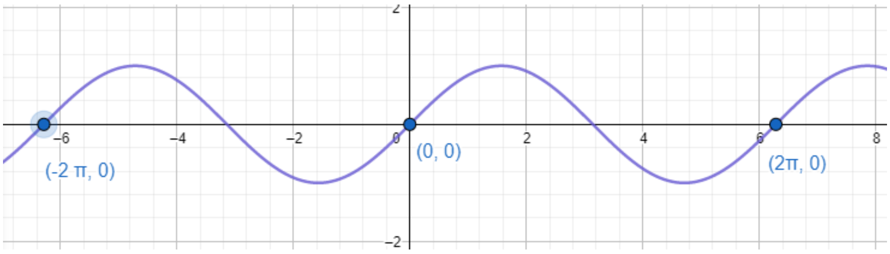
Dada una función $f(x)$ los puntos de corte de la función con los ejes son aquellos puntos en los que la gráfica de la función corta al eje OX y al eje OY, siempre y cuando estos puntos pertenezcan al $Dom f(x)$. Para calcularlos:

- Con el eje OX: son los puntos $(x_0, 0)$ donde $x_0 \in Dom f(x)$, y se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, si tiene solución.
- Con el eje OY: es el punto $(0, f(0))$ si $0 \in Dom f(x)$.

5.2.2 Periodicidad

Una función $f(x)$ es periódica si existe un número $T \in \mathbb{R}^+$, llamado periodo, tal que para todo $x \in Dom f(x)$ se verifica que $f(x + T) = f(x)$. Al mínimo valor que cumple la definición anterior le llamamos periodo fundamental.

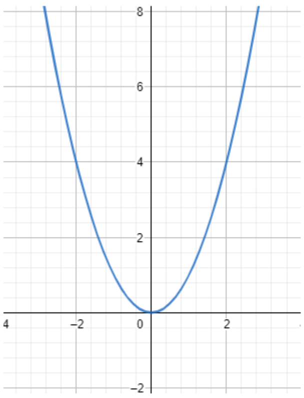
Si una función es periódica, basta con estudiar un periodo de su gráfica, y luego repetirla para representarla.



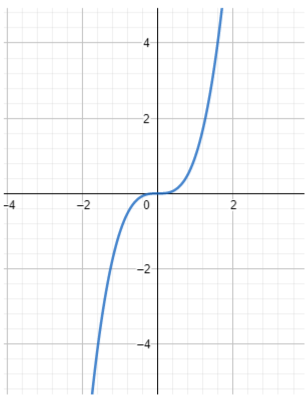
5.2.3 Simetrías

Una función $f(x)$ es simétrica par si se verifica que $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in Dom f(x)$. La gráfica de la función es simétrica respecto del eje OY.

Una función $f(x)$ es simétrica impar si se verifica que $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom f(x)$. La gráfica de la función es simétrica respecto del punto $(0, 0)$.



PAR



IMPAR

5.2.4 Asíntotas y ramas infinitas

Una función $f(x)$ presenta una rama infinita cuando alguna de sus variables (o las dos) tienden a $+\infty$ o a $-\infty$. Cuando una de estas ramas infinitas se aproxima a una recta, decimos que dicha rama infinita tiene un comportamiento asintótico y la recta a la que se aproxima le llamamos asíntota de la función.

Una función $f(x)$ puede presentar tres tipos de asíntotas:

- **Asíntotas verticales:** son rectas paralelas al eje OY de la forma $x = a$. Para que la recta $x = a$ sea una asíntota vertical de la función $f(x)$ debe de verificarse alguna de las siguientes condiciones:

  a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

  b) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

  c) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

  a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

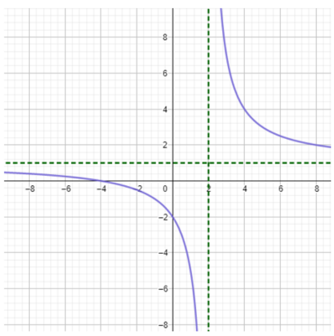
- **Asíntotas horizontales:** son rectas paralelas al eje OX de la forma $y = a$. Para que la recta $y = a$ sea una asíntota horizontal de la función $f(x)$ debe de verificarse alguna de las siguientes condiciones:

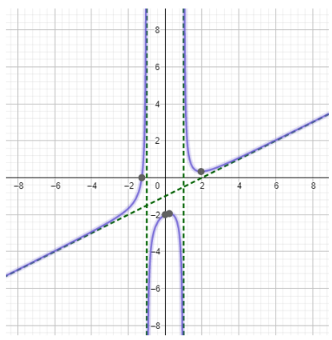
  a) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$. Asíntota horizontal en $y = a$ por la derecha.

  b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$. Asíntota horizontal en $y = a$ por la izquierda.

- **Asíntotas oblicuas:** son rectas de la forma $y = mx + n$, siendo $m \neq 0, n$ dos números que verifican:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$





5.2.5 Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I \subseteq Dom f(x)$, se dice que $f(x)$ es:

- Creciente en el intervalo I: si para cualquier $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$.
- Decreciente en el intervalo I: si para cualquier $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \geq f(y)$.
- Estrictamente creciente en el intervalo I: si para cualquier $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) < f(y)$.
- Estrictamente decreciente en el intervalo I: si para cualquier $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) >\geq f(y)$.

Una función $f(x)$ se dice que es monótona en un intervalo $I \subseteq Dom f(x)$ si es creciente o decreciente en I. Se dice estrictamente monótona en I si $f(x)$ es estrictamente creciente o decreciente en I.

Teorema: Sea $f(x)$ una función definida y derivable en un intervalo $I \subseteq Dom f(x)$:

a) Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en I.

b) Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, entonces $f(x)$ es estrictamente decreciente en I.

c) Si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, entonces $f(x)$ es creciente en I.

d) Si $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, entonces $f(x)$ es decreciente en I.

Método para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función* $f(x)$*:

1. Buscamos los puntos críticos de la función, es decir, los puntos x_i que verifican $f'(x_i) = 0$.
2. Formamos intervalos abiertos desde $-\infty$ hasta $+\infty$ con los puntos obtenidos en el paso anterior más los puntos de discontinuidad de la función.
3. Escogemos un punto interior del primer intervalo y lo evaluamos en $f(x)$, al resultado obtenido le aplicamos el Teorema anterior y ya sabremos cómo se comporta la función en dicho intervalo.
4. Repetimos el paso anterior con cada uno de los intervalos del paso 2.

5.2.6 Extremos relativos y absolutos

Sea $f(x)$ una función, decimos que $f(x)$ tiene:

- Un máximo absoluto en $x = a \in Domf(x)$ si $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in Domf(x)$.
- Un mínimo absoluto en $x = a \in Domf(x)$ si $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in Domf(x)$.
- Un máximo relativo en $x = a \in Domf(x)$ si en un entorno de a, $x = a$ es un máximo absoluto.
- Un mínimo absoluto en $x = a \in Domf(x)$ si en un entorno de a, $x = a$ es un mínimo absoluto.

Teorema del extremo relativo: Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, y sea $x = a$ un punto interior de I. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, y $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = a$ (es decir, tiene un máximo o un mínimo en $x = a$), entonces $f'(a) = 0$.

Método 1 para encontrar los extremos relativos de una función:

1. Buscamos los puntos críticos de la función, es decir, los puntos x_i que verifican $f'(x_i) = 0$.
2. Buscamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
3. Tomamos cada par de intervalos de la forma (a, x_i) y (x_i, b), si $f(x)$ es continua en el intervalo (a, b) y:
   a) Si $f(x)$ decrece en el intervalo a la izquierda de x_i y crece en el intervalo a la derecha de x_i, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_i$.
   b) Si $f(x)$ crece en el intervalo a la izquierda de x_i y decrece en el intervalo a la derecha de x_i, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = x_i$.

Método 2 para encontrar los extremos relativos de una función:

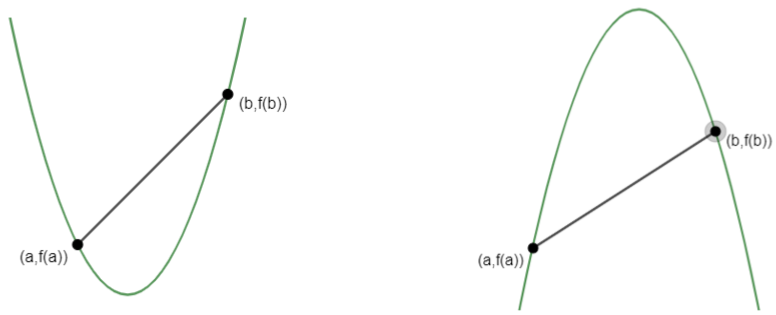
1. Buscamos los puntos críticos de la función, es decir, los puntos x_i que verifican $f'(x_i) = 0$.
2. Calculamos $f''(x)$.
3. Sustituimos cada punto crítico encontrado x_i en $f''(x)$:
   a) Si $f''(x_i) > 0$ entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_i$.
   b) Si $f''(x_i) < 0$ entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = x_i$.

5.2.7 Curvatura: concavidad y convexidad

Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo I, decimos que:

a) $f(x)$ es convexa en I si $\forall a, b \in I$, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de $f(x)$.

b) $f(x)$ es cóncava en I si $\forall a, b \in I$, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de $f(x)$.



CÓNCAVA **CONVEXA**

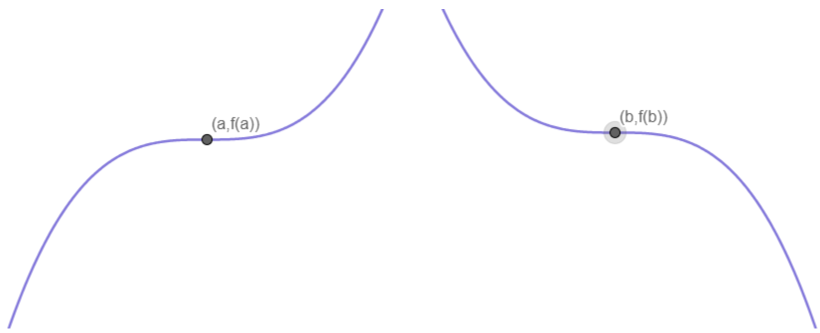
Observación: las definiciones de cónvaca y convexa son una convención, por lo que es posible encontrárselas definidas del revés. Por ello, siempre que vayamos a estudiar la curvatura de una función, indicaremos antes con un simple dibujo a qué estamos llamando cónvaca y a qué convexa.

Método para analizar la curvatura de una función:

1. Calculamos $f''(x)$ y resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.
2. Formamos los intervalos abiertos desde $-\infty$ hasta $+\infty$ con los puntos obtenidos en el paso anterior más los puntos de discontinuidad de la función.
3. Escogemos un punto interior del primer intervalo x_0 y lo evaluamos en $f''(x)$, si el resultado obtenido es:
   a) $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ es cónvaca en dicho intervalo.
   a) $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ es convexa en dicho intervalo.
4. Repetimos el paso anterior con cada uno de los intervalos del paso 2.

5.2.8 Puntos de inflexión

Dada una función $f(x)$ y un punto de su dominio $x = a$, decimos que que $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = a$ si en ese punto la función pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.



Teorema: Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, y sea $x = a$ un punto interior de I. Si $f(x)$ es dos veces derivable en $x = a$, y $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces $f''(a) = 0$.

Método para obtener los puntos de inflexión de una función:

1. Calculamos $f''(x)$ y resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.
2. Calculamos $f'''(x)$ y evaluamos en ella cada una de las raíces x_i obtenidas en el paso 1. Si el resultado obtenido es:
   a) $f'''(x_i) \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = x_i$.
   a) $f'''(x_i) = 0$, entonces $f(x)$ no tiene un punto de inflexión en $x = x_i$.