

Hoja 5 Funciones

Beatriz Ballesteros

1. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

Determinése los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

2. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

- a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b) Calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

3. Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \frac{1}{9} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para $a = 0$, determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

4. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

- a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

5. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 3(x+1)e^{\frac{-x}{2}}$$

Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

6. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$$

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

7. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

- a) Calcule el valor del parámetro real a para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.
- b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y sus extremos relativos, si existen.

8. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

- a) Halle el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si los hubiera, sus extremos relativos.

9. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

10. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

- a) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = 1$ de la función $f(x)$ sea un extremo relativo.
- b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $x = 1$.

11. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Obtenga los coeficientes reales a , b , y c , de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

12. Dada la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

- a) Calcule su función derivada.
- b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad.

13. Dada la función real de variable real:

$$f(x) = x(5 - x)^2$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f .

14. Se considera la función:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

- a) Détermine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

15. Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

16. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

dónde a y b son parámetros reales. Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

17. Los beneficios en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa un cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

- a) Détermine, en caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?
- b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que este experimente un incremento positivo. Justifique si el beneficio aumentará o disminuirá.

18. El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función $f(x) = -2x^2 + 14x - 12$, donde x expresa las toneladas de cemento producidas al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0, 8]$.

- a) Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.
- b) Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

19. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, contéste razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) Calcúlense su dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- a) Hállense las asíntotas, si las tuviere, y esbócese la gráfica de la función f .

20. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$. Esbócese la gráfica de la función f .

21. Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(2x - 1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Calcúlese a para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- b) Represente gráficamente la función para el caso $a = 3$.

22. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x(2-x)}{x-1}$$

- a) Determínese las asíntotas de f . Calcúlense los extremos relativos de f .
- a) Represente gráficamente la función f .