Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Examen Global**
Fecha: 29/11/2021 **1ª Evaluación**
Profesor: Beatriz Ballesteros

Instrucciones:

1. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a las cuestiones en las hojas de respuestas de examen indicando siempre el número y apartado del ejercicio a resolver.
2. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
3. Cualquier comportamiento que pueda ser interpretado como un intento de pedir o transmitir información a un compañero conllevará la retirada del examen a los alumnos implicados y la no calificación del mismo.

Preguntas:

1. **(Calificación máxima: 4 puntos)** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ky+2z=5 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$$
   a) **(1,5 puntos)** Discuta el sistema según los distintos valores del parámetro real k.
   b) **(1,25 puntos)** Resuelva el sistema para $k=0$.
   c) **(1,25 puntos)** Resuelva el sistema para $k=2$.

2. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Una compañía aérea oferta hasta un máximo de 60 plazas en sus vuelos diarios entre Madrid y Lisboa. Las plazas de clase turista se ofrecen a 40 euros, mientras que las de primera clase tienen un precio de venta de 75 euros. Por normativa internacional, el número de plazas ofertadas de primera clase debe ser inferior o igual al doble de las plazas de clase turista y superior o igual a la mitad de las plazas de dicha clase turista. Además, por motivos de estrategia empresarial, la compañía tiene que ofrecer como mínimo 10 plazas de clase turista. ¿Qué número de plazas de cada clase se deben ofertar diariamente con el objetivo de maximizar los ingresos de la aerolínea? Determínese dicho ingreso máximo.

3. **(Calificación máxima: 3 puntos)** Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dónde m es un parámetro real.
   a) **(1 punto)** Determínese los valores de m para los cuáles la matriz A es invertible.
   b) **(2 puntos)** Considérese la ecuación matricial $A\cdot X=A\cdot B+B$. Para $m=5$, exprese X en función de A y B, y calcúlese la matriz X.

1. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 2 & | & 5 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = k + 1 + 2k - k^2 - 1 - 2 = -k^2 + 3k - 2 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $k = 2$, $k = 1$

* **Caso I:** si $k \neq 2$, $k \neq 1$.
  $rgA = 3 = rgA^* =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, $\exists!$ solución

* **Caso II:** $k = 1$.
  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2$
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 + 2 - 4 - 5 - 1 = -1 \neq 0 \Longrightarrow rgA^* = 3$
  $rgA = 2 \neq rgA^* = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible, $\nexists$ solución

* **Caso III:** $k = 2$.
  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2$
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 10 - 8 - 5 - 1 = 0 \Longrightarrow rgA^* = 2$
  $rgA = 2 = rgA^* = 2 =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado, $\exists$ infinitas soluciones

b) Si $k = 0$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Por el apartado anterior sabemos que para $k = 0$ el sistema es Compatible Determinado, por lo que para resolverlo podemos aplicar la regla de Cramer:

$|A| = -k^2 + 3k - 2 = -2$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 - 5 - 4 = -2$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 1 - 2 - 2 = 2$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 5 = -4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-2}{-2} = 1$; $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{2}{-2} = -1$; $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

c) Si $k = 2$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Por el apartado anterior sabemos que para $k = 2$ el sistema es Compatible Indeterminado, por lo que para resolverlo podemos aplicar el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad\;\; y + z = 3 \end{cases}$$

Sea $z = t$, entonces $y = 3 - t$

Sustituyendo en la primera ecuación: $x + 3 - t + t = 2$, obtenemos $x = -1$.

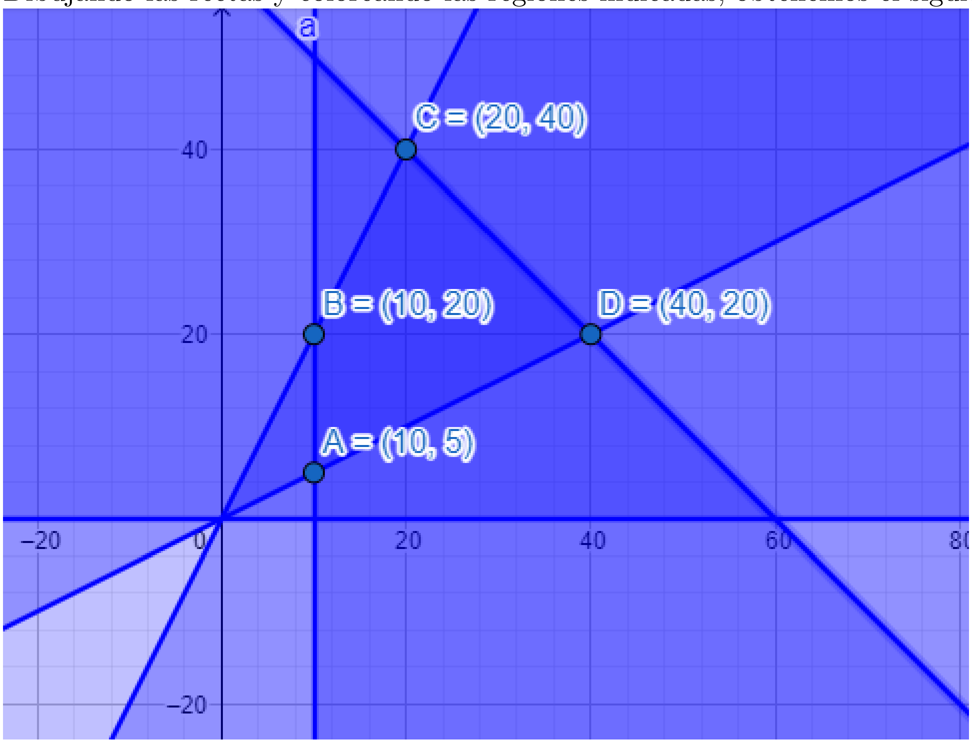
Por tanto, las soluciones son: $x = -1$, $y = 3 - t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

2. $x =$ nº plazas en clase turista

$y =$ nº plazas de primera clase

El sistema de restrcciones es: $\begin{cases} x + y \leq 60 \\ y \leq 2x \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x \geq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Dibujando las rectas y coloreando las regiones indicadas, obtenemos el siguiente dibujo:



La región factible es el cuadrilátero de vértices ABCD, y sus puntos interiores siendo:

$A(10, 5)$

$B(10, 20)$

$C(20, 40)$

$D(40, 20)$

La función objetivo es: $f(x,y) = 40x + 75y$
$A \longrightarrow f(10,5) = 40 \cdot 10 + 75 \cdot 5 = 775$ euros
$B \longrightarrow f(10,20) = 40 \cdot 10 + 75 \cdot 20 = 1900$ euros
$C \longrightarrow f(20,40) = 40 \cdot 20 + 75 \cdot 40 = 3800$ euros
$D \longrightarrow f(40,20) = 40 \cdot 40 + 75 \cdot 20 = 3100$ euros
El beneficio máximo es de 3800 euros y se alcanza vendiendo 20 billetes de clase turista y 40 billetes de primera clase.

3. a) Existirá A^{-1} si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{vmatrix} = 6m + 54 + 15 - 45 - 36 - 3m = 3m - 12 = 0$$

Resolviendo la ecuación: $m = \dfrac{12}{3} = 4$

Por tanto, $\exists A^{-1}$ si $m \neq 4$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Despejamos X de la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$:
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B)$
$I \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot B + A^{-1} \cdot B$
$X = I \cdot B + A^{-1} \cdot B$
$X = B + A^{-1} \cdot B$
$|A| = 3m - 12 =$

Calculamos la matriz adjunta de A: $AdjA = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos su traspuesta: $(AdjA)^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de A: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (AdjA)^t = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos X:
$X = B + A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 8 & 13 & -12 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$