Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Examen Parcial 1**
Fecha: 25/11/2021 **1ª Evaluación**
Profesor: Beatriz Ballesteros

Instrucciones:

1. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a las cuestiones en las hojas de respuestas de examen indicando siempre el número y apartado del ejercicio a resolver.

2. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

3. Cualquier comportamiento que pueda ser interpretado como un intento de pedir o transmitir información a un compañero conllevará la retirada del examen a los alumnos implicados y la no calificación del mismo.

Preguntas:

1. **(Calificación máxima: 2,5 puntos)** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de la que se conoce que su determinante es 5.

   a) **(1,25 puntos)** Calcula paso a paso utilizando las propiedades de los determinantes el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{vmatrix}$.

   b) **(0,75 puntos)** Si B es otra matriz cuadrada de orden 3, y sabemos que el determinante de B es 4, calcula el determinante de la matriz $B \cdot A^{-1}$ y explica qué propiedades has utilizado para para obtenerlo.

   c) **(0,5 puntos)** Calcula el determinante de la matriz $3A$ y explica qué propiedades has utilizado para para obtenerlo.

2. **(Calificación máxima: 2,5 puntos)** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) **(1 punto)** Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

   b) **(1,5 puntos)** Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa de A.

3. **(Calificación máxima: 2,5 puntos)** Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   a) **(1,25 puntos)** Determínese los valores de a, b, c para que se verifique: $C \cdot A = B \cdot C$ y $|C| = 2$.

   b) **(1,25 puntos)** Calcúlese, para los valores $a = b = c = 1$ $C^{-1} \cdot B \cdot C$.

4. **(Calificación máxima: 2,5 puntos)** Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) **(1,25 puntos)** Determínese la matriz C^{40} y C^{101}.

   b) **(1,25 puntos)** Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$.

1. a) $\begin{vmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 3a & g \\ 2b & 3b & h \\ 2c & 3c & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $|B \cdot A^{-1}| = |B| \cdot |A^{-1}| = |B| \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{4}{5}$
Hemos utilizado la propiedad ”el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de las matrices” y la propiedad ”el determinante de la inversa de una matriz es 1 entre el determinante de la matriz”.

c) $|3A| = 3^3 \cdot |A| = 3^3 \cdot 5 = 135$
Hemos utilizado la propiedad ”si un número multiplica a toda una fila o columna de un determinante podemos extraerlo como factor común fuera del determinante”. Hemos aplicado esta propiedad tres veces (una por cada fila).

2. a) Existirá A^{-1} si $|A| \neq 0$.
$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 1 - 4 - 1 = 2a - 4 = 0$
Resolviendo la ecuación: $a = \dfrac{4}{2} = 2$
Por tanto, $\exists A^{-1}$ si $a \neq 2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$|A| = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$
Calculamos la matriz adjunta de A: $AdjA = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$
Calculamos su traspuesta: $(AdjA)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
Calculamos la inversa de A: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (AdjA)^t = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Calculamos $C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{pmatrix}$
Calculamos $B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix}$
Calculamos $|C| = \begin{vmatrix} -2 & a \\ b & c \end{vmatrix} = -2c - ab$
Aplicamos las condiciones del enunciado:
$C \cdot A = B \cdot C = \begin{pmatrix} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix}$
$|C| = -2c - ab = 2$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 6+2a=0 \\ -3b+2c=-b \\ -3b+2c=-c \\ -2c-ab=2 \end{cases}$$

Resolviéndolo obtenemos:
De la primera ecuación: $6+2a=0 \Longrightarrow 2a=-6 \Longrightarrow a=-3$
De la segunda ecuación: $-2b+2c=0 \Longrightarrow b=c$
De la tercera ecuación obtenemos lo mismo que en la segunda.
Si en la cuarta ecuación sustituimos el valor $a=-3$ y $b=c$: $-2b-(-3)b=2 \Longrightarrow b=2$, y por tanto, $c=2$
Solución: $a=-3$, $b=c=2$

b) Calculamos C^{-1}:
$|C| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-1=-3$
$Adj(C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
$(Adj(C))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
$C^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Calculamos $C^{-1}\cdot B\cdot C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

4. a) Calculamos $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
$C^3 = C^2\cdot C = I\cdot C = C$
Por tanto, $C^n = \begin{cases} I & n \quad par \\ C & n \quad impar \end{cases}$
$C^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$C^{101} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Vamos a despejar X en la ecuación matricial $X\cdot A+3B=C$
$X\cdot A = C-3B$
$X = (C-3B)\cdot A^{-1}$
Calculamos por un lado $C-3B$:
$C-3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
Calculamos por otro lado A^{-1}:
$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1$
$Adj A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$(Adj A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(Adj A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos X:

$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$